Heureka!

Mathematische Rätsel

Herausgegeben von Heinrich Hemme

Anaconda

2025

Tageskalender

1 Mittwoch Januar

Neujahr

Aufgabe

Opas alte mechanische Armbanduhr hat auf dem Zifferblatt links neben der Ziffer 3 ein kleines Fenster, in dem das Datum angezeigt wird, allerdings nur die Tageszahl und nicht auch der Monat und die Jahreszahl. Wenn Opa sie aufgezogen hat, läuft sie exakt 2222 Stunden und bleibt dann stehen. In diesen 2222 Stunden verstellt Opa seine Uhr nie. Am 1. Januar dieses Jahres um genau 10:01 Uhr hat Opa seine Uhr das letzte Mal aufgezogen und das Datum richtig eingestellt. Wenn die Uhr irgendwann stehen bleibt, muss er sie nicht nur sofort erneut aufziehen, sondern sie auch um einige Tage vorstellen, damit das Datum wieder stimmt. Um wie viele Tage muss er sie vorstellen?

Lösung

2222 Stunden sind 92 Tage und 14 Stunden. Der Januar, der Februar und der März haben zusammen 31 + 28 + 31 = 90 Tage. Folglich bleibt die am 1. Januar um 10:01 Uhr aufgedrehte Uhr am 4. April um 00:01 Uhr stehen. Da die Datumsanzeige einer mechanischen Armbanduhr jeden Monat mit 31 Tagen zählt, geht sie am 4. April drei Tage nach und muss deshalb von Opa um drei Tage vorgestellt werden.

2 Donnerstag Januar

Aufgabe

Der Kapitän eines aufgetaucht fahrenden U-Boots sieht gleichzeitig in nicht allzu großer Entfernung drei Minen hochgehen. Alle Minen haben exakt den gleichen Abstand zum Boot. Seltsamerweise hört er aber nur zwei Detonationen. Wie ist das möglich?

Lösung

Da die Entfernungen der Minen zum U-Boot alle gleich sind, hört er die drei Detonationen gleichzeitig als einzige Detonation. Die Schallgeschwindigkeit im Wasser ist etwa viermal so groß wie in der Luft. Deshalb hört er diese eine Detonation zweimal: zuerst durch das Wasser und dann durch die Luft.

3 Freitag Januar

Aufgabe

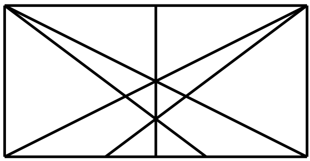
Bilden Sie aus den zehn Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 und 9 möglichst viele Primzahlen. Dabei muss jede Ziffer genau einmal verwendet werden, und keine Primzahl darf mit der 0 beginnen. Wie viele Primzahlen können auf diese Weise höchstens entstehen?

Lösung

Es können höchstens vier einstellige Primzahlen 2, 3, 5 und 7 gebildet werden, und die 0 kann nur in einer Primzahl auftauchen, die mindestens dreistellig ist. Folglich lassen sich aus den zehn Ziffern nicht mehr als sechs Primzahlen bilden. Für genau sechs Primzahlen sind drei verschiedene Kombinationen ihrer Stellenzahlen denkbar: (1, 1, 1, 2, 2, 3), (1, 1, 1, 1, 3, 3) und (1, 1, 1, 1, 2, 4). Für die erste Kombination gibt es die sieben Möglichkeiten (2, 3, 5, 41, 67, 809), (2, 3, 5, 41, 89, 607), (2, 3, 5, 47, 61, 809), (2, 3, 5, 47, 89, 601), (2, 5, 7, 43, 61, 809), (2, 5, 7, 43, 89, 601) und (2, 5, 7, 61, 83, 409), für die zweite Kombination die beiden Möglichkeiten (2, 3, 5, 7, 461, 809) und (2, 3, 5, 7, 641, 809) und für die dritte Kombination die beiden Möglichkeiten (2, 3, 5, 7, 41, 6089) und (2, 3, 5, 7, 41, 8609).

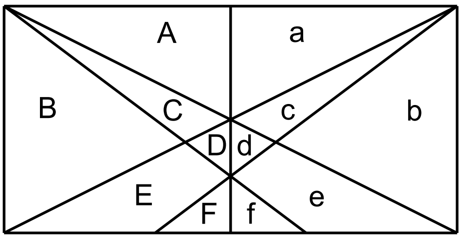
Aufgabe

Wie viele Dreiecke enthält diese Figur?



Lösung

Die Figur enthält insgesamt 36 Dreiecke. Die ersten 16 Dreiecke sind A, B, C, D, F, BC, CD, ACD, DEF, ACa, CDd, EFf, ABCa, CDde, BEFf, BCDEFdef, und die nächsten 16 Dreiecke sind die Spiegelbilder der ersten 16 Dreiecke. Man bekommt sie, indem man bei den ersten 16 Dreiecken die Groß- durch Kleinbuchstaben und die Klein- durch Großbuchstaben ersetzt. Die letzten vier Dreiecke liegen symmetrisch zur senkrechten Mittellinie: Aa, Ff, EDde und ACDdca.



6 Montag Januar

Heilige Drei Könige

Aufgabe

Die Summe der Kehrwerte der Teiler von 6 beträgt 2, wobei 1 und 6 selbst auch als Teiler zählen. Es gilt also $1/1 + 1/2 + 1/3 + 1/6 = 2$. Wie lautet die nächste Zahl, bei der die Summe der Kehrwerte ihrer Teiler 2 beträgt?

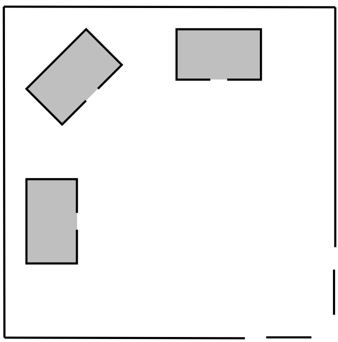
Lösung

Sind 1, a, b, c, … und n die der Größe nach aufsteigend geordneten Teiler der gesuchten Zahl n, so gilt $1/1 + 1/a + 1/b + 1/c + \ldots 1/n = 2$. Multipliziert man beide Seiten der Gleichung mit n, wird daraus $n/1 + n/a + n/b + n/c + \ldots + n/n = 2n$ oder $n/a + n/b + n/c + \ldots + 1 = n$. Auf der linken Seite der Gleichung stehen die Teiler von n in absteigender Reihenfolge, allerdings ohne n selbst, und auf der rechten Seite steht n. Dies ist exakt die Definition der vollkommenen Zahlen. Die erste vollkommene Zahl ist 6 und die gesuchte zweite Zahl ist 28. Die nächsten drei vollkommenen Zahlen sind übrigens 496, 8128 und 33 550 336.

7 Dienstag Januar

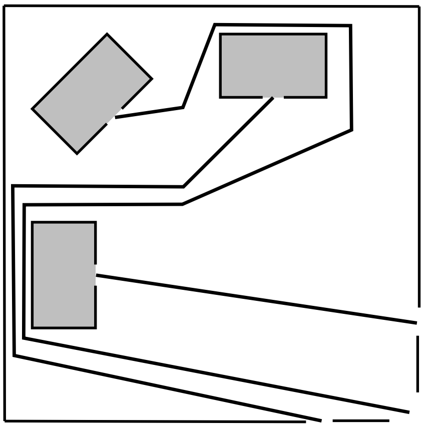
Aufgabe

Drei Brüder, die auf einem eingezäunten Grundstück wohnen, das sie von ihrem Vater geerbt haben, sind so zerstritten, dass jeder von ihnen einen eigenen Weg von seiner Haustür bis zu einem Grundstückstor haben will. Die Wege dürfen sich nicht kreuzen, und außerdem will der Bruder im westlichen Haus das Osttor, der Bruder im nördlichen Haus das Südtor und der Bruder im nordwestlichen Haus das südöstliche Tor benutzen. Wie können die drei Brüder ihre Wege anlegen?



Lösung

Es gibt viele Möglichkeiten, wie die drei Brüder die Wege anlegen können. Das Bild zeigt eine davon.



Aufgabe

Das Produkt der ersten 2025 Primzahlen ist eine Zahl mit 7589 Stellen. Auf wie viele Nullen endet diese riesige Zahl?

Lösung

Damit eine Zahl auf *n* Nullen endet, muss sie je *n*-mal die Primfaktoren 2 und 5 enthalten. Unter den 2025 ersten Primzahlen kommt aber nur je einmal die 2 und die 5 vor. Somit endet die Zahl nur auf eine 0.

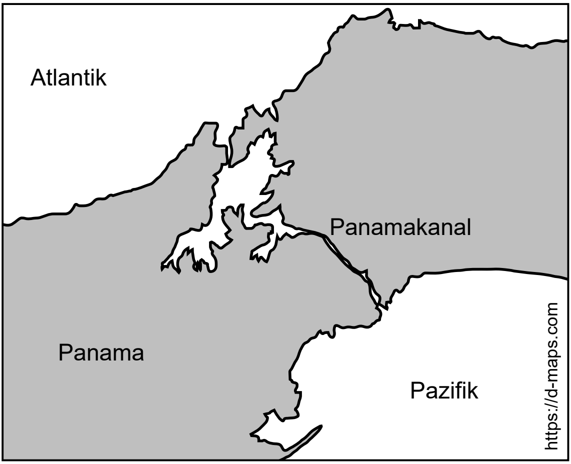
9 Donnerstag Januar

Aufgabe

Die Springburn fährt in die westliche Mündung des Panamakanals ein, durchfährt ihn von West nach Ost und verlässt ihn zwölf Stunden später durch die östliche Mündung. Trotzdem befindet sie sich direkt nach dem Verlassen des Kanals im Pazifik. Das Schiff hat nicht im Kanal gewendet und ist auch nicht rückwärts gefahren. Wie ist dies zu erklären?

Lösung

Viele Menschen glauben, Mittelamerika verlaufe von Norden nach Süden. Das ist aber nicht ganz richtig. Es verläuft eher von Nordwesten nach Südosten und in Panama sogar ziemlich genau von Westen nach Osten. Panama grenzt im Westen an Costa Rica und im Osten an Kolumbien. Im Norden stößt es an den Atlantik und im Süden an den Pazifik. Da der Panamakanal von Nordwesten nach Südosten verläuft, liegt sein atlantisches Ende deutlich westlicher als sein pazifisches Ende.



10 Freitag Januar

Aufgabe

Für wie viele verschiedene ganze Zahlen n ist auch $n/(1000 - n)$ eine ganze Zahl?

Lösung

Löst man die Gleichung $m = n/(1000 - n)$ nach n auf, erhält man $n = 1000m/(m + 1)$. Da $1000 = 2^3 5^3$ ist, ergibt der Bruch $1000m/(m + 1)$ eine ganze Zahl, wenn $m + 1$ einen der sechzehn positiven Werte $2^0 5^0 = 1$, $2^1 5^0 = 2$, $2^2 5^0 = 4$, $2^3 5^0 = 8$, $2^0 5^1 = 5$, $2^1 5^1 = 10$, $2^2 5^1 = 20$, $2^3 5^1 = 40$, $2^0 5^2 = 25$, $2^1 5^2 = 50$, $2^2 5^2 = 100$, $2^3 5^2 = 200$, $2^0 5^3 = 125$, $2^1 5^3 = 250$, $2^2 5^3 = 500$ und $2^3 5^3 = 1000$ oder einen der entsprechenden negativen Werte annimmt. Der Bruch $m/(m + 1)$ ergibt nur für $m + 1 = 1$ eine ganze Zahl. Dies ist aber schon im ersten Bruch enthalten. Somit gibt es insgesamt 32 verschiedene ganze Zahlen n, für die auch $n/(1000 - n)$ eine ganze Zahl ist.

11 Samstag Januar

12 Sonntag Januar

Aufgabe

In einem Sparschwein liegen nur zehn 10-Cent-Münzen und einige 20-Cent-Münzen. Nun werden zwei 20-Cent-Münzen und ein paar 10-Cent-Münzen in das Schwein gesteckt. Der Anteil der 20-Cent-Münzen an der Gesamtzahl der Münzen im Schwein ändert sich dadurch nicht. Wie viele 20-Cent-Münzen haben sich ursprünglich im Sparschwein befunden?

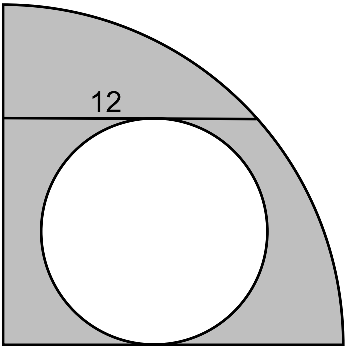
Lösung

Haben ursprünglich n 20-Cent-Münzen in dem Sparschwein gelegen und werden m 10-Cent-Münzen hineingesteckt, beträgt der ursprüngliche Anteil der 20-Cent-Münzen an der Gesamtzahl der Münzen $n/(n + 10)$ und der anschließende Anteil $(n + 2)/(n + m + 12)$. Da sich der Anteil nicht ändert, gilt $n/(n + 10) = (n + 2)/(n + m + 12)$, was sich zu $nm = 20$ vereinfachen lässt. Die Zahl 20 hat die Teiler 1, 2, 4, 5, 10 und 20. Darum können ursprünglich nur 1, 2, 4, 5, 10 oder 20 20-Cent-Münzen in Sparschwein gesteckt haben.

13 Montag
Januar

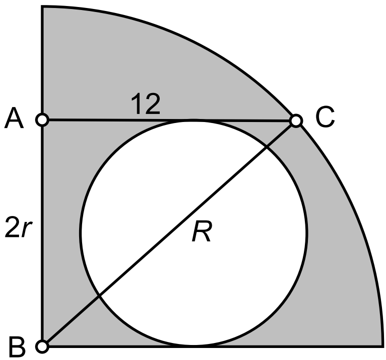
Aufgabe

Durch einen Viertelkreis verläuft parallel zum unteren Radius eine Strecke der Länge 12, die den linken Radius mit dem Kreisbogen verbindet. Der weiße Kreis tangiert diese Strecke und den unteren Radius. Wie groß ist die graue Fläche?



Lösung

Ist R der Radius des Viertelkreises und r der des Vollkreises, gilt für das rechtwinklige Dreieck ABC nach dem Satz des Pythagoras $12^2 + (2r)^2 = R^2$. Dies kann man zu $\frac{1}{4}R^2 - r^2 = 36$ umformen. Die graue Fläche ist die Differenz der Viertel- und der Vollkreisfläche und somit $\frac{1}{4}\pi R^2 - \pi r^2 = (\frac{1}{4}R^2 - r^2)\pi = 36\pi \approx 113{,}1$ groß.



14 Dienstag Januar

Aufgabe

Setzen Sie so zwischen einige Ziffern der Zahl 123456789 Pluszeichen, dass dadurch ein Ausdruck vom Wert 72 entsteht.

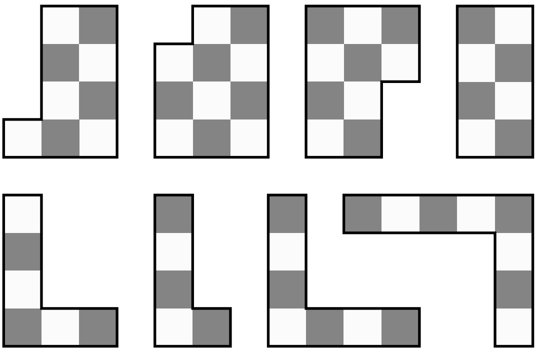
Lösung

Wir setzen nicht zwischen einige Ziffern der Zahl 123456789 Pluszeichen, sondern gehen den umgekehrten Weg und setzen zwischen alle Ziffern Pluszeichen, von denen wir anschließend wieder einige streichen. Es gilt $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$. Fasst man zwei aufeinanderfolgende Ziffern n und $n + 1$ zu einer zweistelligen Zahl $10n + (n + 1)$ zusammen, erhöht sich der Wert der Summe um $10n + n + 1 - (n + n + 1) = 9n$. Da ein Ausdruck vom Wert 72 gebildet werden soll, muss die Summe von 45 auf 72, also um 27 erhöht werden. Da $27 = 9 \cdot 3$ beträgt, ist dies nur möglich, wenn die Ziffern 3 und 4 zu 34 zusammengefasst werden. Folglich ist die einzige Lösung $1 + 2 + 34 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 72$.

15 Mittwoch Januar

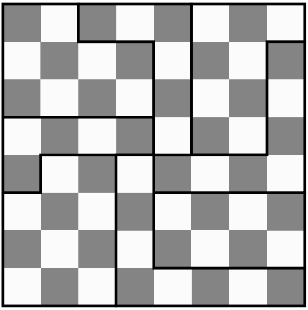
Aufgabe

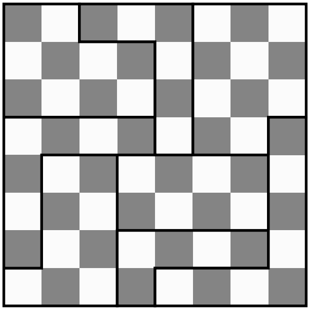
Fügen Sie diese acht Teile zu einem Schachbrett zusammen. Natürlich müssen die Felder des Brettes immer abwechselnd schwarz und weiß sein.

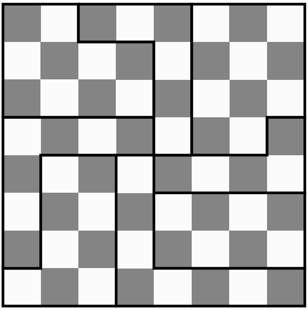


Lösung

Es gibt drei verschiedene Lösungen.







16 Donnerstag Januar

Aufgabe

Ein Einbrecher befand sich in einem Gebäude. Obwohl dieses gut bewacht war, gelang es ihm hineinzukommen, ohne Alarm auszulösen. Er hielt sich lange in dem Gebäude auf und ging dann wieder. Auch dabei wurde kein Alarm ausgelöst. Wäre er aber nicht so lange geblieben, wäre er beim Verlassen des Gebäudes gescheitert. Wo befand sich dieser Einbrecher?

Lösung

Er war da, wo er hingehörte: im Gefängnis.

Aufgabe

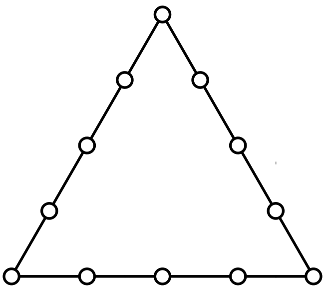
Welche dreistellige natürliche Zahl ist gleich dem Produkt aus ihrer um 1 erhöhten ersten Ziffer, ihrer um 1 erhöhten zweiten Ziffer und ihrer dritten Ziffer? Eine dreistellige Zahl kann nicht mit 0 beginnen.

Lösung

Hat die dreistellige Zahl die drei Ziffern A, B und C, beträgt ihr Wert $100A + 10B + C$. Dieser soll gleich dem Produkt aus $A + 1$, $B + 1$ und C sein. Es muss somit $100A + 10B + C = (A + 1)(B + 1)C$ gelten, was sich zu $(100 - (B + 1)C)A + (10 - C)B = 0$ umformen lässt. Da natürlich keine Ziffer größer als 9 sein kann, beträgt das Produkt $(B + 1)C$ höchstens 90, und da die Anfangsziffer A mindestens 1 sein muss, kann der erste Summand $(100 - (B + 1)C)A$ der Gleichung nicht kleiner sein als 10. Der zweite Summand $(10 - C)B$ kann zwar, wenn $B = 0$ ist, 0 werden, aber nicht negativ. Folglich ist die linke Seite der Gleichung immer positiv und niemals 0. Somit gibt es die gesuchte Zahl gar nicht.

Aufgabe

Auf dem Umfang eines gleichseitigen Dreiecks sind zwölf Punkte so markiert, wie es das Bild zeigt. Verbinden Sie mit sechs Strecken jeden dieser Punkte mit genau einem anderen Punkt. Die Strecken müssen alle durch das Innere des Dreiecks laufen, dürfen also nicht auf seinem Umfang liegen. Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es hierfür?



Lösung

Jeder der drei Eckpunkte kann nur mit einem er drei Seitenpunkte der jeweils gegenüberliegenden Seite verbunden werden. Dafür gibt es insgesamt $3^3 = 27$ Möglichkeiten. Nun sind noch auf jeder Seite zwei Seitenpunkte frei. Betrachten wir zunächst nur die beiden freien Seitenpunkte der unteren Seite. Sie müssen mit je einem Seitenpunkt der linken und der rechten Seite verbunden werden. Die beiden Punkte dürfen nicht auf derselben Seite liegen, weil sonst die beiden Punkte auf der anderen Seite miteinander verbunden werden müssten und die Verbindung dann nicht durch das Innere des Dreiecks liefe. Folglich hat der erste Punkt vier und der zweite dann nur noch zwei Wahlmöglichkeiten, beide zusammen haben somit $4 \cdot 2 = 8$ Möglichkeiten. Die Verbindung der letzten beiden Punkte liegt anschließend fest. Insgesamt gibt es also $27 \cdot 8 = 216$ Möglichkeiten, die Punkte zu verbinden.

Aufgabe

Bilden Sie mit genau vier Fünfen einen Ausdruck vom Wert 20. Zusätzlich dürfen Sie aber beliebig viele Mal-, Geteilt- und Fakultätszeichen, Klammern, Dezimalpunkte, Periodenstriche und Wurzeln verwenden. Die amerikanische Schreibweise der Dezimalzahlen ist erlaubt, d. h. die europäische 0,5 darf als amerikanische .5 geschrieben werden. Gaußklammern sind nicht erlaubt.

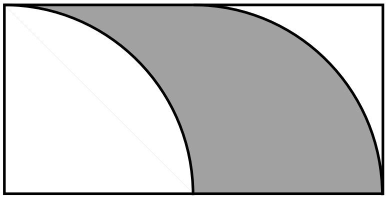
Lösung

Eine mögliche Lösung ist $5!/5!! \cdot 5 \cdot .5 = 20$. Dabei ist !! das Symbol für die Doppelfakultät, wobei n!! das Produkt aller geraden natürlichen Zahlen ist, die kleiner sind als n, wenn n gerade ist, und das Produkt aller ungeraden natürlichen Zahlen, die kleiner sind als n, wenn n ungerade ist.

21 Dienstag
Januar

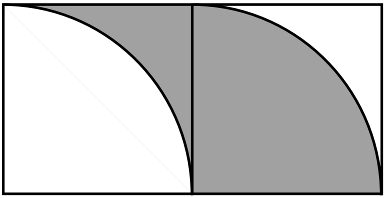
Aufgabe

In einem Rechteck mit den Seitenlängen 4 und 8 liegen, so wie es das Bild zeigt, zwei Viertelkreise vom Radius 4. Wie groß ist die graue Fläche?



Lösung

Teilt man das Rechteck in zwei Quadrate, so schneidet die Halbierungsstrecke von der grauen Figur rechts einen Viertelkreis ab, mit dem man die weiße Lücke im linken Quadrat füllen kann. Die graue Figur hat somit die Fläche $4 \cdot 4 = 16$.



22 Mittwoch Januar

Aufgabe

$$33 + 33 = 33$$

Diese Gleichung ist korrekt. Dass sie aber trotzdem völlig falsch aussieht, liegt nur daran, dass bei der Darstellung der Zahlen eine Kleinigkeit fehlt. Was fehlt?

Lösung

Im Dezimalsystem und auch in allen anderen Zahlensystemen ist die Gleichung falsch. Gehören die einzelnen Zahlen aber zu verschiedenen Zahlensystemen, kann sie durchaus richtig sein. Die »Kleinigkeit«, die in der Gleichung fehlt, ist also die Angabe der einzelnen Basen: $33_a + 33_b = 33_c$. Dies kann man auch als $3a + 3 + 3b + 3 = 3c + 3$ schreiben und zu $c - b - a = 1$ zusammenfassen. Da in allen drei Zahlen die Ziffer 3 vorkommt, müssen die Basen größer als 3 sein. Die kleinsten Basen von unendlichen vielen Möglichkeiten sind $a = b = 4$ und $c = 9$. Somit gilt $33_4 + 33_4 = 33_9$ oder $15_{10} + 15_{10} = 30_{10}$.

Aufgabe

$$333_a + 333_b = 333_c$$

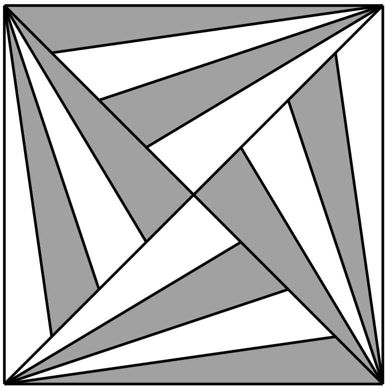
Die drei Zahlen sind nicht oder nicht alle im Dezimalsystem dargestellt, sondern in Zahlensystemen mit den Basen a, b und c. Für welche Werte der drei Basen ist die Gleichung korrekt? Gibt es überhaupt eine Lösung?

Lösung

Die Gleichung $333_a + 333_b = 333_c$ kann man umschreiben zu $3a^2 + 3a + 3 + 3b^2 + 3b + 3 = 3c^2 + 3c + 3$ und dann zu $a(a + 1) + b(b + 1) + 1 = c(c + 1)$ zusammenfassen. Bei den drei Produkten werden jeweils zwei aufeinanderfolgende Zahlen miteinander multipliziert. Sie ergeben darum jeweils eine gerade Zahl. Folglich ist die linke Gleichungsseite ungerade und die rechte gerade. Darum ist das Problem unlösbar.

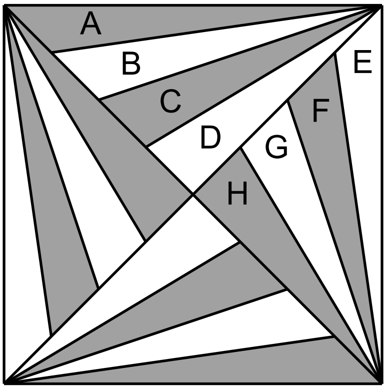
Aufgabe

Wie viele Dreiecke enthält dieses Muster?



Lösung

Die einzelnen Dreiecke können sich aus bis zu acht Flächen zusammensetzen: A, B, C, D, AB, BC, CD, ABC, BCD, ABCD, DEFGH, CDEFGH, BCDEFGH und ABCDEFGH. Da das Muster eine vierzählige Drehsymmetrie besitzt, taucht jedes dieser vierzehn Dreieck viermal auf. Somit enthält das Muster insgesamt 56 Dreiecke.



Aufgabe

Unter welchen Umständen ist diese Gleichung

$$2 + 11 = 12$$

korrekt? Diese Frage wird mit einem Augenzwinkern gestellt, und um sie beantworten zu können, muss man ein wenig um die Ecke denken.

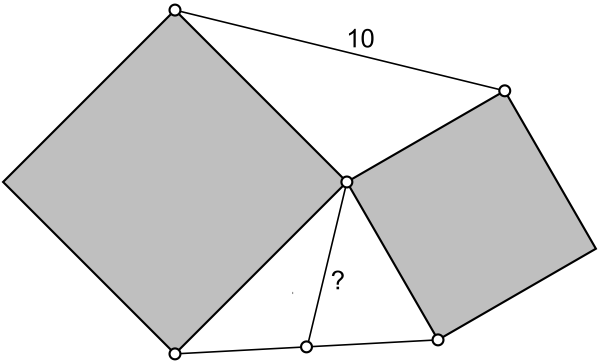
Lösung

Ersetzt man die Zahlen durch Zahlwörter und nimmt statt des Wortes »zwei« das akustisch besser von »drei« zu unterscheidende Wort »zwo« und ersetzt in dem Wort »zwölf« den Umlaut »ö« durch »oe«, erhält man die Gleichung zwo + elf = zwoelf. Deutet man das Pluszeichen als Verbindungssymbol zweier Buchstabenketten, so ist die Gleichung korrekt.

27 Montag Januar

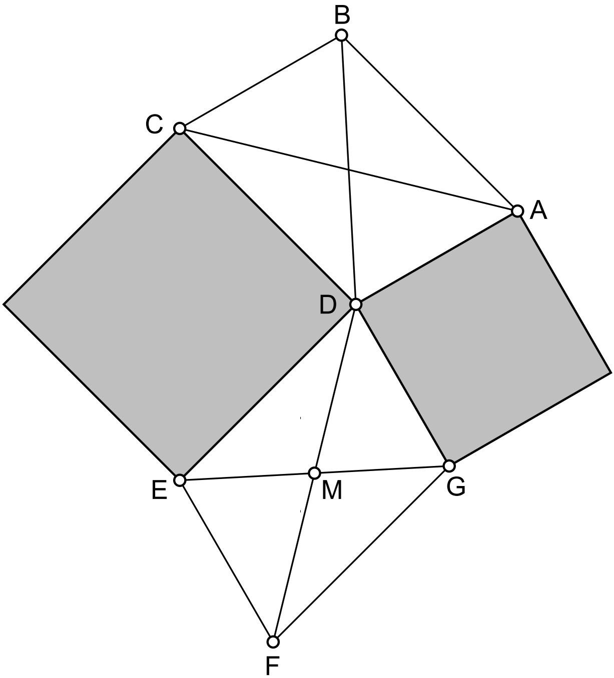
Aufgabe

Zwei Quadrate haben eine gemeinsame Ecke. Die Verbindungsstrecke zwischen den beiden oberen Ecken der Quadrate hat die Länge 10. Die mit einem Fragezeichen markierte Strecke halbiert die Verbindungsstrecke zwischen den beiden unteren Ecken der Quadrate. Wie lang ist sie? Ist überhaupt eine eindeutige Antwort möglich?



Lösung

Die beiden Dreiecke ACD und DEG können zu den Parallelogrammen ABCD und DEFG erweitert werden. Da beide Parallelogramme gleiche Seitenlängen und gleiche Winkel haben, sind sie deckungsgleich. Folglich sind auch die beiden Diagonalen AC und DF gleich lang. Und weil sich die Diagonalen eines Parallelogramms gegenseitig halbieren, hat die Strecke DM die Länge 5.



28 Dienstag Januar

Aufgabe

In einer Schublade unter der Ladentheke des Krämers liegen 260 Drollos: kleine, mittlere und große. Die mittleren Drollos sind nicht billiger als die kleinen und nicht teurer als die großen Drollos. Alle 260 Drollos zusammen kosten 260 Euro. Ein kleines Drollo kostet genauso viele Cent wie kleine Drollos in der Schublade liegen. Ebenso kostet ein mittleres Drollo genauso viele Cent wie mittlere Drollos und ein großes Drollo genauso viele Cent wie große Drollos in der Schublade liegen. Wie teuer sind ein kleines, ein mittleres und ein großes Drollo?